Cursul 5 Dinamica punctului material

3.6 Lucru mecanic

Lucrul mecanic al forţelor constante

Definiţie: ***Lucrul mecanic*** *al forţei constante este egal cu produsul scalar dintre vectorul forţa şi vectorul deplasare al punctului de aplicaţie al forţei.*

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot cos\,\alpha\,, \tag{3.13}$$

unde α este unghiul dintre forţă şi deplasarea produsă de aceea forţă.

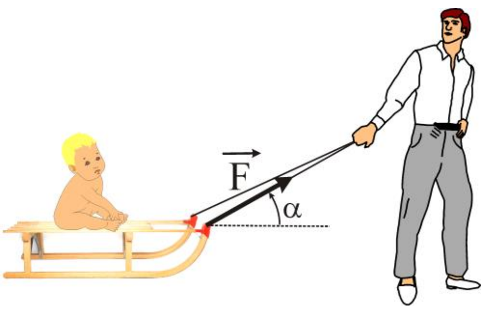

Fig. 3.4 În general forţa care acţionează asupra corpurilor poate sa nu fie orientată în direcţia deplasării acestora.

Se pot distinge două cazuri:

1. Forţa este orientată în direcţia deplasării, $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s\,. \tag{3.15}$$

2. Forţa nu este orientată în direcţia deplasării, $\alpha \neq 0$:

$$\begin{aligned} L &= \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot cos\,\alpha \\ &= F\,cos\,\alpha \cdot s = F_s \cdot s \end{aligned}\,. \tag{3.16}$$

Lucrul mecanic este egal cu produsul dintre componenta forţei pe direcţia deplasării şi deplasarea produsă de această componentă. Componenta forţei normală (perpendiculară) pe direcţia deplasării nu produce lucru mecanic. Dacă unghiul $\alpha > 90^0$, $\cos\alpha < 0$ lucru mecanic este negativ. Lucrul mecanic efectuat de o forţă $\vec{F}$ în absenţa frecării nu depinde de drumul pe care se deplasează corpul.

Dimensiunea şi unitatea de măsură a lucrului mecanic*[1]*:

$$\begin{aligned}[L]&=[F]\cdot[s]=N\cdot m=J\\ [L]&=M\cdot L^{2}\cdot T^{-2}\end{aligned}. \tag{3.14}$$

Lucrul mecanic al forţelor variabile

Pentru calculul lucrului mecanic efectuat de forţa $\vec{F}(s)$ când punctul ei de aplicaţie se deplasează de la A la B împărţim deplasarea totală $\vec{s}$ în intervale infinit mici, $d\vec{s}$ pentru care se poate considera forţa constantă. Atunci lucrul mecanic elementar este:

$$\begin{aligned} dL=\vec{F}(s)\cdot d\vec{s} \quad &\Rightarrow \quad \int_A^B dL=\int_A^B \vec{F}(s)\cdot d\vec{s}\\ L_{AB}&=\int_A^B \vec{F}(s)\cdot d\vec{s}\end{aligned}. \tag{3.17}$$

Definiţie: Lucrul mecanic al forţelor variabile cu deplasarea este egal cu integrala forţei în raport cu spaţiul parcurs.

3.7 Puterea

De multe ori ne interesează nu numai valoare lucrului mecanic efectuat de cineva sau de ceva ci şi timpul în care a fost efectuat lucrul dat.

$$P=\frac{dL}{dt}. \tag{3.18}$$

Definiţie: Puterea este viteza de producere a lucrului mecanic, sau viteza de variaţie a energiei cinetice în unitatea de timp.

Dacă forţa care produce lucrul mecanic este constantă în timp atunci:

$$P=\frac{dL}{dt}=\frac{d(F\cdot s)}{dt}=F\cdot\frac{d(s)}{dt}=F\cdot v. \tag{3.19}$$

Puterea instantanee a unui agent care lucrează cu forţă constantă este egala cu produsul dintre forţa şi viteza instantanee a punctului sau de aplicaţie.

[1] **James Prescott Joule**: Fizician englez, James Joule este cunoscut pentru lucrările sale în domeniul electricităţii şi termodinamicii (studiul căldurii). Joule a descoperit relaţia dintre curentul electric, rezistenţa electrică şi căldura produsă de circuitele electrice. Unitatea de măsura în sistemul internaţional este joule (J), numită după James Joule.

Unitatea de măsură şi dimensiunea[2].

$$\left[P\right]=\frac{\left[L\right]}{\left[t\right]}=\frac{j}{s}=1W \quad . \tag{3.20}$$
$$\left[P\right]=ML^{2}T^{-3}$$

Wattul este puterea unui agent care produce un lucru mecanic egal cu 1 Joule în fiecare secundă. Din ecuaţia (3.16) se deduce lucrul mecanic în funcţie de putere:

$$L=P\cdot t\,. \tag{3.21}$$

3.8 Energia

La baza definiţiei energiei stă faptul că numai acele corpuri sau sisteme fizice pot efectua lucru mecanic, care au energie. Atunci când corpurile sau sistemele fizice efectuează lucru mecanic energia lor scade.

Definiţie: Energia este o stare a corpurilor sau sistemelor fizice în care acestea au posibilitatea de a efectua lucru mecanic.

Lucru mecanic efectuat de un corp este variaţia energiei lui, în timp ce energia pe care o posedă un corp este o măsură a lucrului mecanic efectuat asupra lui. Energia este o mărime fizică de stare în timp ce lucrul mecanic este o mărime fizică de proces. Exista două tipuri de energie mecanică, după cum este starea corpurilor **statică** sau **dinamică**. Adică energia poate sa fie potenţială sau energia de poziţie şi cinetică sau energia de mişcare.

Definiţie: Energia potenţială sau de poziţie este capacitatea unui corp sau sistem fizic de-a efectua lucru mecanic ca urmare a poziţiei lui fată de Pământ sau ca urmare a poziţiei relative a parţilor sale componente.

Definiţie: Energia cinetică sau de mişcare este capacitatea unui corp sau sistem fizic de-a efectua lucru mecanic ca urmare a stării de mişcare în care se găseşte.

Energia potenţială

$$L_{d}=G\cdot h=mgh\ . \tag{3.22}$$

Lucrul mecanic de ridicare este energia înmagazinata în corpul poziţionat la înălţimea *h*.

$$E_{p}=L_{d}=m\cdot g\cdot h\,. \tag{3.23}$$

[2] **James Watt (1736-1819),** inventator scoţian a adus importante îmbunătăţiri motorului cu aburi, făcându-l practic pentru uzul la scala industrială.

Energia cinetică

Dacă deplasarea corpului este pe orizontală şi se efectuează fără frecare atunci întreg lucru mecanic este folosit pentru accelerarea corpului.

$$L_o = F \cdot s = m \cdot a \cdot s = m \cdot \frac{v^2}{2s} \cdot s = m \cdot \frac{v^2}{2}. \tag{3.24}$$

Definiţie: Energia unui corp în mişcarea de translaţie este egală cu jumătatea produsului dintre masa corpului şi pătratul vitezei.

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2}. \tag{3.25}$$

3.9 Legea de conservare a energiei

Teorema de variaţie a energiei cinetice

Presupunem că un corp are viteza v_1 la un moment t_1 când începe acţiunea forţei de accelerare $\vec{F}_a$ şi viteza v_2 la un moment t_2. Lucrul mecanic efectuat în intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$ este:

$$L_a = F_a \cdot s = ma \cdot s = m\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = E_{c2} - E_{c1}. \tag{3.26}$$

Variaţia energiei cinetice a unui corp este egală cu lucrul mecanic al forţei de accelerare care a acţionat asupra lui în timpul acestei variaţii.

Energia mecanică totală

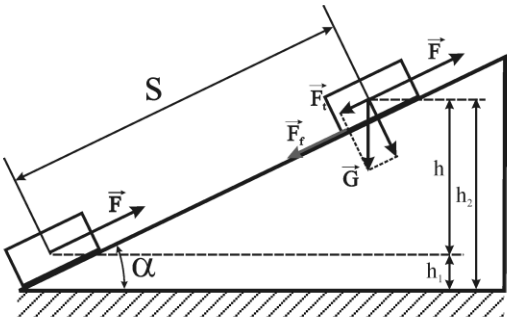

Fig. 3.5 Ilustrarea legii de conservare a energiei.

Se aplică asupra unui corp de masă ***m*** o forţa F pentru a-l urca pe planul înclinat de la înălţimea h_1 la înălţimea h_2. Deşi asupra corpului se aplică expres numai forţa F asupra lui mai acţionează forţa tangenţială, F_t şi forţa de frecare, F_f (pe durata mişcării). Pentru ca mişcarea sa să fie accelerată trebuie ca rezultanta forţelor să fie diferită de zero:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{F} + \vec{F}_t + \vec{F}_f \neq 0 \\ R &= F - F_t - F_f > 0 \end{aligned}. \tag{3.27}$$

Din teorema variaţiei energiei cinetice avem:

$$L = R \cdot s = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \tag{3.28}$$

sau dacă introducem ecuaţia (3.19) în (3.20) obţinem:

$$F \cdot s = F_t \cdot s + F_f \cdot s + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \tag{3.29}$$

Forţa de frecare este proporţională cu forţa normală de apăsare a corpului asupra planului înclinat:

$$F_f = \mu \cdot N = \mu \cdot G_n = \mu \cdot mg \, cos\,\alpha, \tag{3.30}$$

unde μ este coeficientul de frecare şi depinde de suprafeţele corpului şi planului înclinat.

Forţa tangenţială este:

$$F_t = G_t = mg \, sin\,\alpha. \tag{3.31}$$

De unde lucrul mecanic al forţei de tracţiune F este:

$$\begin{aligned} F \cdot s &= mg \, sin\,\alpha \cdot s + \mu \cdot mg \, cos\,\alpha \cdot s + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \\ F \cdot s &= mgh + \mu \cdot G_t s + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = mg(h_2 - h_1) + \mu \cdot G_t s + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \\ F \cdot s &= \mu \cdot G_t s + \left[\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2\right] - \left[\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1\right] \end{aligned} \tag{3.32}$$

unde expresia:

$$E_t = \frac{mv^2}{2} + mgh, \tag{3.33}$$

este energia totală.

Energia totală a unui corp în mişcarea de translaţie este egală cu suma energiei potenţiale şi cinetice a corpului.

$$L = Q_f + E_{t2} - E_{t1}. \tag{3.34}$$

Lucrul mecanic efectuat de o forţa aplicată, F, asupra unui corp este egal cu variaţia energiei totale a corpului plus energia calorică disipată prin frecare.

Legea conservării energiei cinetice

Enunţ: În procesele mecanice fără frecare, izolate fizic, energiile cinetice şi potenţiale se pot transforma reciproc una în alta dar suma lor rămâne constantă.

$$\begin{aligned} &L = (Q_f = 0) + E_{t2} - E_{t1} = 0 \quad \Rightarrow \\ &E_{t2} = E_{t1} = const \end{aligned}, \tag{3.35}$$

sau

$$E_t = \frac{mv^2}{2} + mgh = const\ . \tag{3.36}$$

3.10 Legea de conservare a impulsului

În tratarea dinamică a unui sistem de particule constatăm ca este util să facem distincţie dintre forţele externe şi forţele interne. Să considerăm un sistem pentru care rezultanta forţelor externe este zero. Atunci din legea a II-a a dinamicii rezultă:

$$\begin{gathered} \vec{R} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\vec{p} = 0 \quad \Rightarrow \\ \vec{p} = const \end{gathered} \ . \tag{3.37}$$

Să considerăm acum un sistem de puncte materiale izolat supus numai acţiunii forţelor interne. Impulsul acestui sistem este egal cu:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i\ , \tag{3.38}$$

dacă dorim să calculăm variaţia impulsului în raport cu timpul:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d(\vec{v}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\ . \tag{3.30}$$

Într-un sistem de particule care acţionează una asupra celeilalte conform principiului III al dinamicii (al acţiunii şi reacţiunii) pentru fiecare forţa $\vec{F}_i$ exista o altă forţă $\vec{F}_j$ pentru care $\vec{F}_i = -\vec{F}_j$. Atunci suma forţelor este:

$$\begin{gathered} \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j\right] = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}\left(\vec{F}_i + \vec{F}_j\right) = 0 \\ \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \quad d\vec{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = const \end{gathered} \ . \tag{3.40}$$

Forţele interne nu sunt capabile să modifice impulsul total al sistemului de particule.

Enunţ: Impulsul total al unui sistem de particule izolat (rezultanta forţelor externe este zero) se conservă.

3.11 Momentul forţei

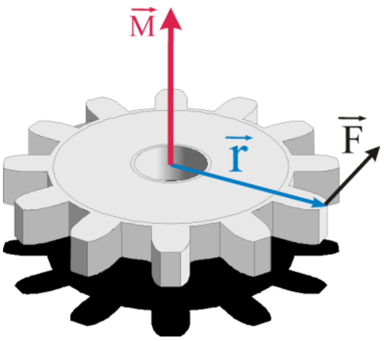

Fig. 3.6 Definirea momentului forţei.

Fie o forţă F care acţionează asupra unui corp rigid care se poate roti în jurul unei axe. Se constată ca efectul de rotaţie este direct proporţional cu valoarea forţei F şi cu distanta r de la axa de rotaţie până la punctul de aplicare al forţei.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \tag{3.41}$$

unde ***r*** este braţul forţei.

Definiţie: Mărimea fizică care caracterizează efectul de rotaţie al unei forte, aplicată unui corp rigid, se numeşte moment al forţei faţă de un punct în care este fixat corpul.

Vectorul moment al unei forţe faţă de un punct este perpendicular pe planul format de vectorii $\vec{r}$ şi $\vec{F}$, în sensul dat de regula burghiului.

3.12 Momentul cinetic

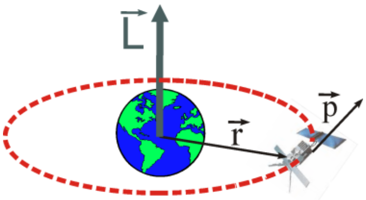

Fig. 3.7 Ilustrarea momentului cinetic.

Prin analiza mişcării unui punct material care se mişcă pe o traiectorie curbilinie, în raport cu o axă ce intersectează planul mişcării se poate introduce o mărime fizică numită moment cinetic.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \tag{3.42}$$

3.13 Legea de conservare a momentului cinetic

Teorema variaţiei momentului cinetic

Considerăm o modificare infinitezimală a momentului cinetic într-un timp infinit scurt, atunci:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \vec{v} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \vec{F} = m(\vec{v} \times \vec{v}) + \vec{r} \times \vec{F} \quad . \\ \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \end{aligned} \tag{3.43}$$

Momentul forţei este egal cu derivata în timp a momentului cinetic.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \tag{3.44}$$

Dacă momentul forţei se anulează atunci prin integrare se găseşte ca momentul cinetic se conservă.

$$\vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\vec{L} = 0. \tag{3.45}$$
$$\vec{L} = \text{const}.$$

Cazuri în care momentul forţei $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ se anulează sunt:

1. $\vec{F} = 0$ forţa se anulează.
2. $\vec{r} = 0$ direcţia forţei trece prin punctul axa de rotaţie.
3. $\vec{F} \| \vec{r}$ forţa şi braţul forţei sunt paralele. (Forte de tip central).

3.14 Momentul de inerţie

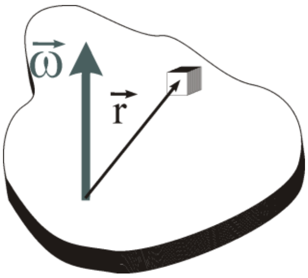

Fig. 3.8 O placă subţire care se poate roti în jurul axei z.

Considerăm o placă subţire dea lungul căreia avem o distribuţie de masă. Placa se găseşte în planul xy şi se poate roti în jurul axei z. Elementul de masă m_i se mişcă cu viteza;

$$\vec{v}_i = \vec{\omega}_i \times \vec{r}_i. \tag{3.46}$$

Dacă corpul este rigid atunci vitezele unghiulare sunt aceleaşi indiferent de poziţia elementului de masă:

$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega} \quad i = 1,2,\ldots n, \tag{3.47}$$

deci:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i. \tag{3.48}$$

În mişcarea circulară viteza este perpendiculară pe rază, deci:

$$v_i = r_i \cdot \omega. \tag{3.49}$$

Energia cinetica a plăcii este atunci:

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(m_i r_i^2\right) \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2, \tag{3.50}$$

unde s-a definit mărimea I_z ca fiind momentul de inerţie al plăcii în raport cu axa z.

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i r_i^2\right), \tag{3.51}$$

sau sub forma integrală:

$$I = \oint_V r^2 dm = \oint_V r^2 \rho(r) dV. \tag{3.52}$$